شروط المسافة :

① $d(x,y) \geq 0$

② $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

③ $d(x,y) = d(y,x)$

④ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

نسمي المجموعة X مع المسافة d بالفضاء المتري (X,d)

الكرة المفتوحة و الكرة المغلقة و سطح الكرة :

ليكن (X,d) فضاء متري و لنعرف عليه المجموعات التالية :

A $B(a,r) = [x \in X : d(x,a) < r]$

نسمي $B(x,a)$ كرة مفتوحة مركزها a ونصف قطرها r .

B $\overline{B}(a,r) = [x \in X : d(x,a) \leq r]$

نسمي $\overline{B}(x,a)$ كرة مغلقة مركزها a ونصف قطرها r .

C $S(a,r) = [x \in X : d(x,a) = r]$

نسمي $S(a,r)$ سطح الكرة التي مركزها a ونصف قطرها r .

الفضاء المتري المتقطع :

يعرف هذا الفضاء بالشكل :

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$$

و يتحقق في هذا الفضاء :

$$\forall x \in X ; B(x,\tfrac{1}{2}) = [x]$$

النقطة الداخلية لمجموعة :

ليكن (X,d) فضاءاً مترياً و $A \subseteq X$ بحيث A مجموعة جزئية من X و $a \in A$.

نسمي النقطة a نقطة داخلية للمجموعة A إذا وجدت كرة مفتوحة $B(a,r)$ بحيث يكون $B(a,r) \subseteq A$

★ إن مجموعة النقاط الداخلية للمجموعة A تسمى داخلية A ويرمز لها A°

★ $X^{\circ} = X$, $\emptyset^{\circ} = \emptyset$, $(A^{\circ})^{\circ} = A^{\circ}$

★ لإيجاد داخلية مجموعة ما نفتح كل المجالات ونحذف النقاط المنعزلة في المجموعة .

★ $A^{\circ} \subseteq A$ المجموعة A دوماً تحوي داخليتها

★ لإيجاد داخلية مجموعة في فضاء جزئي (A,d) :

① إذا وجدت نقاط منعزلة في المجموعة نبقي النقاط التي هي بالأصل منعزلة في الفضاء الجزئي ونحذف باقي النقاط المنعزلة .

② نفتح كل المجالات ونفيد اغلاق كل طرف مغلق في الفضاء

المجموعات المفتوحة:

نقول عن المجموعة الجزئية A من الفضاء المتري X مجموعة مفتوحة إذا كانت جميع نقاطها داخلية

أي إذا كان $A = A^\circ$

★ أي اجتماع لكرات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة « اجتماع أي أسرة من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة ».

★ في أي فضاء متري $X , \emptyset$ مفتوحتان.

★ أي كرة مفتوحة في الفضاء المتري هو مجموعة مفتوحة.

★ تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة.

★ داخلية المجموعة A هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في $\mathbb{R}$.

المجموعات المغلقة:

نسمي المجموعة F من الفضاء المتري X مجموعة مغلقة إذا كانت متممتها $X \setminus F$ مفتوحة:

★ تكون المجموعة F مغلقة إذا وفقط إذا كانت متممتها مفتوحة.

★ تكون المجموعة F مفتوحة إذا وفقط إذا كانت متممتها مغلقة.

★ أي تقاطع لمجموعات مغلقة هو مجموعة مغلقة.

★ اجتماع عدد منته من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة.

★ في أي فضاء متري $X , \emptyset$ مغلقتان.

★ أي مجال مغلق في الفضاء الحقيقي المألوف هو مجموعة مغلقة.

الجوار:

تعريف 1: ليكن (X,d) فضاء متري و $a \in X$ نسمي المجموعة الجزئية $\mathcal{V}$ من X جواراً لـ a إذا وجدت كرة $B(x,r)$ بحيث يكون $B(x,r) \subseteq \mathcal{V}$

تعريف 2: نقول عن المجموعة $\mathcal{V}$ أنها جوار للنقطة a إذا وجدت مجموعة مفتوحة مثل U بحيث

$$a \in U \subseteq \mathcal{V}$$

تعريف 3: يكون $\mathcal{V}$ جواراً لـ a إذا كانت جميع حدود المتتالية باستثناء عدد منته منها محتواة في $\mathcal{V}$

★ تكون المجموعة A مفتوحة إذا وفقط إذا كانت جواراً لكل نقطة من نقاطها.

★ تقاطع عدد منته من جوارات النقطة هو جوار لهذه النقطة.

★ إن كل نقطة تنتمي لجواراتها.

★ إن ما يحوي الجوار هو أيضاً جوار أي إذا كان $\mathcal{V}$ جواراً لـ a و $\mathcal{V} \subseteq G \Rightarrow G$ جوار لـ a

$A^{\circ} \subseteq A \subseteq \overline{A}$

/ /

لصاقة مجموعة:

(نعني أي جوار)

نقول عن $x \in (X,d)$ انها نقطة ملاصقة بالمجموعة $A \subseteq (X,d)$ إذا كانت أي كرة $B(x,r)$ تتقاطع مع A.

- ★ مجموعة النقاط الملاصقة لـ A نسميها لصاقة A ونرمز لها بـ $\overline{A}$
- ★ $\overline{A}$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي A
- ★ $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x,A)=0$
- ★ $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ توجد متتالية من عناصر A ومتقاربة من x
- ★ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ، $\overline{X} = X$ ، $\overline{\phi} = \phi$
- ★ تكون المجموعة A مغلقة إذا وفقط إذا كانت تساوي لصاقتها $A = \overline{A}$
- ★ إذا كانت $x \in A$ فإن $x \in \overline{A} \Leftarrow A \subseteq \overline{A}$
- ★ $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$
- ★ $\overline{A}$ تساوي تقاطع جميع المجموعات المغلقة التي تحوي A.
- ★ نسمي المجموعة الجزئية A من الفضاء المتري X مجموعة كثيفة إذا كانت لصاقتها تساوي الفضاء كله $\overline{A} = X$
- ★ نقول عن فضاء متري أنه فصول ((قابل للفصل)) إذا كان يحوي مجموعة كثيفة وقابلة للعد
- ★ في الفضاء الحقيقي المألوف $(\mathbb{R},d)$ حيث d هي المسافة المألوفة، لإيجاد لصاقة مجموعة مكونة من اجتماع مجالات ونقاط منعزلة نقوم بإغلاق كل المجالات وترك النقاط المنعزلة مع اللصاقة.
- ★ إذا كان لدينا فضاءاً جزئياً من $\mathbb{R}$ يحوي مجالات ويحوي نقاط منعزلة لإيجاد لصاقة مجموعة نغلق جميع المجالات ونضيف فتح كل طرف مجال مفتوح في المجموعة وفي الفضاء ونبقي على كل النقاط المنعزلة سواء كانت من الفضاء أو من غير الفضاء.
- ★ $\overline{A} = A' \cup A$
- ★ $X \setminus A^{\circ} = \overline{X \setminus A}$
- ★ $A^{\circ} = X \setminus \overline{X \setminus A}$
- ★ $(X \setminus A)^{\circ} = X \setminus \overline{A}$

مشتقة مجموعة:

(نعني أي كرة $B(x,r)$)

نقول عن النقطة $x \in (X,d)$ أنها نقطة تراكم للمجموعة $A \subseteq (X,d)$ إذا أي جوار يتقاطع مع A بنقاط مختلفة عن x

- ★ مجموعة نقاط التراكم للمجموعة A ندعوها مشتقة A ونرمز لها بـ A'
- ★ $A' = \overline{A} \setminus [\text{النقاط المنعزلة}]$
- ★ $x \in A' \Leftrightarrow$ أي كرة مركزها x تحوي عدد غير منته من عناصر A
- ★ $x \in A' \Leftrightarrow$ توجد متتالية عناصرها من $X \setminus A$ ومتقاربة من x
- ★ A مغلقة إذا وفقط إذا كانت تحوي مشتقها $A' \subseteq A$
- ★ أي نقطة تراكم هي نقطة لاصقة.

خارجية مجموعة :

نقول عن النقطة x أنها نقطة خارجية بالنسبة لـ $A \subseteq (X,d)$ إذا كانت x داخلية في $X \setminus A$

★ مجموعة النقاط الخارجية لـ A نسميها خارجية A ونرمز لها بـ $Ext(A)$ أي أن خارجية المجموعة A هي داخلية المتممة $(X \setminus A)^{\circ}$

★ $$Ext(A) = X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^{\circ}$$

حدود مجموعة (محيط مجموعة) :

نقول عن نقطة x أنها نقطة جبهية للمجموعة A إذا كانت كل كرة مركزها x تتقاطع مع متممة A

★ مجموعة النقاط الجبهية لـ A نسميها محيط أو حدود A ونرمز لها بـ $F_r(A)$

★ $F_r(A) = F_r(X \setminus A)$

★ $F_r(A) = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$

★ $F_r(A) = \overline{A} \setminus A^{\circ}$

★ A مغلقة $\Leftrightarrow F_r(A) \subseteq A$

★ A مفتوحة $\Leftrightarrow F_r(A) \subseteq X \setminus A$

المجموعة Q

$Q^{\circ} = \phi$

$\overline{Q} = \mathbb{R}$

$Q' = \mathbb{R}$

$Ext(Q) = \phi$

$F_r(Q) = \mathbb{R}$

Q ليست مفتوحة وليست مغلقة وهي كثيفة

Q فضاء غير تام لأنها مجموعة غير مغلقة

المجموعة $\mathbb{R} \setminus Q$

$(\mathbb{R} \setminus Q)^{\circ} = \phi$

$(\overline{\mathbb{R} \setminus Q}) = \mathbb{R}$

$(\mathbb{R} \setminus Q)' = \mathbb{R}$

$Ext(\mathbb{R} \setminus Q) = \phi$

$F_r(\mathbb{R} \setminus Q) = \mathbb{R}$

$R^{\circ} = R$

R مجموعة مغلقة

R فضاء تام وغير متراص لأنه غير محدود

$Z^{\circ} = Z$

$\overline{Z} = Z$

هي مجموعة مفتوحة ومغلقة

Z فضاء تام لأنها مجموعة مغلقة

في أي فضاء متري متقطع :

$A^{\circ} = A$

$A' = \phi$

$\overline{A} = A$

$F_r(A) = \overline{A} \setminus A^{\circ} = \phi$

$Ext(A) = X \setminus \overline{A} = X \setminus A$

فضاء تام

غير متراص بشرط أن X غير منتهية

★ ليكون متراص يجب أن يكون محدود ومغلق [illegible]

الفضاء المتري الجزئي:

ليكن (X,d) فضاءاً مترياً و A مجموعة جزئية من X ،
نعرف على A مسافة بواسطة d حيث نأخذ مقصور d على A ونرمزله بـ d/A على النحو التالي:

$$d/A(x,y) = d(x,y) \quad ; \forall x,y \in A$$

إذا المجموعة A مع مقصور المسافة d/A تشكل فضاء مترياً يسمى فضاءاً مترياً جزئياً ونرمز له بالرمز $(A, d/A)$ ولكن الرمز الشائع (A,d)

★ المجموعات المفتوحة في الفضاء الجزئي ليس بالضرورة أن تكون مفتوحة في الفضاء الكلي.

المجموعة المحدودة:

- نسمي المجموعة الجزئية A من الفضاء المتري (X,d) مجموعة محدودة إذا أمكن احتواؤها في كرة نصف قطرها عدد محدود أو منته

- نسمي العدد δ سواء كان منتهياً أو غير منتهي بحيث:
$$\delta = \sup\{d(x,y) \; ; \; x,y \in A\}$$
قطر المجموعة A ، وبناءاً على هذا التعريف تكون المجموعة A محدودة إذا وفقط إذا كان قطرها عدداً منتهياً.

تعريف:

لتكن A,B مجموعتين جزئيتين من الفضاء المتري (X,d) نسمي العدد:

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) \; : \; a \in A \; , \; b \in B\}$$

المسافة بين المجموعتين A,B

المتتاليات:

تعريف ①: ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن x_n متتالية من هذا الفضاء وليكن x عنصراً ما من X نقول عن المتتالية x_n أنها متقاربة من x في X إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; ; \; n > N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

تعريف ②: المتتالية هي أي جوار لـ x يحوي كل حدود المتتالية باستثناء عدد منته من العناصر.

★ إذا كانت x_n متقاربة من x فإن: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$

أو: $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$

متتالية كوشي:

نسمي المتتالية x_n من عناصر الفضاء المتري (X,d) متتالية كوشي « متتالية أساسية » إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; ; \; n > m > N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

الفضاء المتري التام:

نسمي الفضاء المتري (X,d) فضاءاً تاماً إذا كانت كل متتالية كوشي من عناصره متقاربة فيه أي في الفضاء المتري التام تكون المتتالية متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتالية كوشي.

التطبيقات المستمرة:

تعريف 1: ليكن f تطبيقاً من الفضاء المتري (X,d) إلى الفضاء المتري (Y,d') ؛ $f:(X,d)\to(Y,d')$
وليكن $x_0\in X$ نقطة من المنطلق نقول عن التطبيق f أنه مستمر في النقطة x_0 إذا كان:

$$\forall \varepsilon>0\ ;\ \exists \delta>0 : d(x,x_0)<\delta \Rightarrow d'(f(x),f(x_0))<\varepsilon\ \ ;\ \ \delta=\delta(\varepsilon,x_0)$$

تعريف 2: يكون التطبيق f مستمراً في النقطة x_0 إذا وفقط إذا كان من أجل أي كرة مفتوحة $B(f(x_0),\varepsilon)$ توجد كرة مفتوحة $B(x_0,\varepsilon)$ بحيث: $f(B(x_0,\delta))\subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$

تعريف 3: يكون التطبيق f مستمراً في النقطة x_0 إذا وفقط إذا كان من أجل أي جوار v للنقطة $f(x_0)$ في Y يوجد جوار u للنقطة x_0 في X بحيث $f(u)\subseteq v$

★ f مستمر في x_0 $\Leftrightarrow$ من أجل أي متتالية x_n متقاربة من x_0 تكون المتتالية $f(x_n)$ متقاربة من $f(x_0)$

★ التابع f مستمر إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة في Y هي مجموعة مفتوحة في X.

★ التابع f مستمر إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة في Y هي مجموعة مغلقة في X.

★ f مستمر $\Leftrightarrow$ $f(\overline{A})\subseteq(\overline{fA})$ وذلك $\forall A\subseteq X$

التماثل المستمر:

ليكن f تطبيقاً من الفضاء المتري X إلى الفضاء المتري Y : $f:X\to Y$
نطلق على f اسم تماثل مستمر ((هوميومورفيزم)) إذا كان تقابلاً ((عامر ومتباين)) ومستمراً مع معكوسه أي إذا حقق:

1. f تقابل
2. f مستمر
3. f^{-1} مستمر

التقابل:

يكون التطبيق $f:X\to Y$ تقابلاً إذا حقق القضايا التالية:

1. f تماثل مستمر
2. f مستمر ومفتوح
3. f^{-1} مستمر ومغلق

تغطية (غطاء) الفضاء:

ليكن X فضاء متري و $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ أسرة من المجموعات الجزئية من X.
نسمي هذه الأسرة تغطية (غطاء) للفضاء X إذا كان: $X\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$

★ إذا كانت المجموعات U_α جميعها مفتوحة فنقول أنه لدينا تغطية مفتوحة للفضاء X.

★ إذا احتوت هذه التغطية على عدد منته من المجموعات التي تشكل بدورها تغطية للفضاء فنقول أنه لدينا تغطية جزئية منتهية.

الفضاء المتري المتراص:

يسمى الفضاء المتري X فضاءً متراصاً إذا كانت أي تغطية مفتوحة له تحوي على تغطية جزئية منتهية لهذا الفضاء.

المجموعة المتراصة:

نسمي المجموعة الجزئية A من الفضاء المتري X مجموعة متراصة إذا كان الفضاء الجزئي A متراصاً.

★ يبرهن أن المجموعة الجزئية $A \subseteq X$ مجموعة متراصة إذا وفقط إذا كانت أي تغطية مفتوحة لـ A تحوي على تغطية جزئية منتهية لها.

★ كل مجموعة متراصة في الفضاء المتري هي مجموعة مغلقة ومحدودة إلا أن العكس غير صحيح بالحالة العامة.

★ اجتماع عدد منته من المجموعات المتراصة ليس بالضرورة أن تكون متراصة.

الفضاءات المترية المترابطة:

يسمى الفضاء المتري X فضاء مترابط إذا كان لا يساوي اجتماع مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين وغير متقاطعتين.

تقسيم الفضاء ((الفضاءات المترية غير المترابطة)):

نقول عن الفضاء أنه غير مترابط إذا وجدت فيه مجموعتان مفتوحتان A,B حيث $A \neq \emptyset$ ، $B \neq \emptyset$ وغير متقاطعين $A \cap B = \emptyset$ ، $A \cup B = X$ ((أي أن B,A متتامتان)) وفي هذه الحالة نقول عن B,A أنهما يشكلان تقسيماً للفضاء.

المجموعة المترابطة:

نسمي المجموعة الجزئية Y من الفضاء المتري X مترابطة إذا كان الفضاء الجزئي Y مترابط.

★ تقاطع مجموعتين مترابطتين ليس بالضرورة أن يكون مجموعة مترابطة.

★ إذا كانت المجموعة مترابطة فإن لصاقتها تكون مترابطة أيضاً ولكن العكس غير صحيح.

المجموعة المحدبة:

هي المجموعة التي تحوي القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين من نقاطها.

★ تعرف القطعة المستقيمة بين نقطتين X, Y بأنها مجموعة النقاط التي تحقق المعادلة التالية:

$$Z = (1-t)x + ty \quad ; \quad 0 \leq t \leq 1$$

أو

$$Z = \alpha x + \beta y \quad ; \quad \alpha \geq 0 \ , \ \beta \geq 0 \ , \ \alpha + \beta = 1$$

★ كل مجموعة محدبة هي مجموعة مترابطة.

1. أثبت أن المجال المفتوح هو مجموعة مفتوحة في الفضاء المتري الحقيقي المألوف:
ليكن لدينا المجال المفتوح $]a,b[$ ولنأخذ نقطة كيفية c من هذا المجال ولنحسب بعديها عن a,b:

$$d(c,a) = c-a$$

$$d(b,c) = b-c$$

نأخذ أصغر هذين العددين: $r=\min\{c-a, b-c\}$ فإن الكرة $B(c,r) \subseteq]a,b[$

أي أن النقطة c داخلية وبما أن c كيفية ⇐ نقاط هذا المجال هي نقاط داخلية فهو مجموعة مفتوحة.

2. أثبت أن تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة:
لتكن $U_1, U_2, \ldots, U_n$ مجموعات مفتوحة ونثبت أن التقاطع $U=\bigcap_{i=1}^{n} U_i = U_1 \cap \ldots \cap U_n$ هو مجموعة مفتوحة.
لنأخذ نقطة كيفية من هذا التقاطع: $(i=1,2,3,\ldots,n)$ $x \in U \rightarrow x \in U_i$
وباعتبارهن مفتوحات ⇐ x نقطة داخلية في كل من هذه المجموعات.
هذا يعني أنه من أجل أي i يوجد r_i بحيث يكون: $B(x,r_i) \subseteq U_i$
نفرض أن r هو أصغر هذه الأعداد أي $r=\min(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ عندها يكون

$$B(x,r) \subseteq U_i \quad ; (\forall i) \Rightarrow B(x,r) \subseteq U$$

أي أن النقطة x داخلية في التقاطع أي أن كل نقاط التقاطع داخلية أي أن التقاطع مجموعة مفتوحة

3. أثبت أنه من أجل أي مجموعة جزئية A من فضاء متري X تحقق العلاقة: $\bar{A} = A' \cup A$
لدينا: $A \subseteq \bar{A}$ ، $A' \subseteq \bar{A}$ ⇐ $A' \cup A \subseteq \bar{A}$ —— ①
ومن جهة ثانية لنفرض أن $x \in \bar{A}$ فهناك احتمالان:
Ⓐ $x \in A$ عندما $x = A \cup A'$
Ⓑ $x \notin A$ عندما $x \in A'$ ⇐ $x \in A' \cup A$
وفي كلا الحالتين نحصل على: $\bar{A} \subseteq A' \cup A$ —— ②
من ① و ② نجد: $\bar{A} = A' \cup A$

4. لتكن B, A مجموعتين جزئيتين من الفضاء المتري X أثبت أن: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ثم أثبت صحة العلاقة:

$$Ext(A \cup B) = Ext(A) \cap Ext(B)$$

لدينا دوماً $A \subseteq \bar{A}$ ، $B \subseteq \bar{B}$ ⇐ $A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$
بأخذ لصاقة الطرفين: $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$
الطرف الأيمن هو مجموعة مغلقة فهو يساوي لصاقته أي أن: $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$ —— ①
من جهة ثانية لدينا دوماً: $\bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ ، $\bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ أي:

$$\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \text{ —— ②}$$

من ① و ② نجد: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$Ext(A \cup B) = X \setminus \overline{A \cup B}$$
$$= X \setminus (\bar{A} \cup \bar{B})$$
$$= (X \setminus \bar{A}) \cap (X \setminus \bar{B})$$
$$= Ext(A) \cap Ext(B)$$

5. اثبت أن المجموعة الجزئية A من الفضاء المتري X تكون مغلقة إذا كانت أي متتالية متقاربة من عناصر A متقاربة من عنصر من A.

لزوم الشرط: لنأخذ متتالية x_n من عناصر A متقاربة من x ولنثبت أن $x \in A$

x نقطة لاصقة لـ A $\Leftarrow$ $x \in \bar{A} = A$

كفاية الشرط: لنفرض أن A مجموعة مغلقة و x نقطة لاصقة كيفية في A فإنه يوجد متتالية x_n من عناصر A متقاربة من x وحسب الفرض $x \in A$

$\Rightarrow x \in \bar{A} = A \Rightarrow \bar{A} \subseteq A$

6. ليكن X فضاء متري و A مجموعة جزئية من X و x نقطة من هذا الفضاء.

اثبت أن x تكون نقطة تراكم المجموعة A إذا وفقط إذا وجدت متتالية من عناصر $A \setminus [x]$ متقاربة من x.

لزوم الشرط: نفرض أن x نقطة تراكم هذا يعني أن أي جوار للنقطة x يتقاطع مع $A \setminus [x]$ و كحالة خاصة نأخذ الكرة التي مركزها x ونصف قطرها $\frac{1}{n}$ بحيث $B(x, \frac{1}{n})$ تتقاطع مع $A \setminus [x]$:

$B(x, \frac{1}{n}) \cap A \setminus [x] \neq \emptyset$

$n = 1 \Rightarrow B(x, 1) \cap A \setminus [x] \neq \emptyset$

نأخذ نقطة كيفية من هذا التقاطع ولتكن x_1

$n = 2 \Rightarrow B(x, \frac{1}{2}) \cap A \setminus [x] \neq \emptyset$

نأخذ نقطة كيفية من هذا التقاطع ولتكن x_2 وهكذا ... $x_1, x_2 \text{---} x_n$

إن المتتالية x_n من عناصر $A \setminus [x]$ ومتقاربة من $A \setminus [x]$

$\Rightarrow d(x_n, x) = \frac{1}{n} \to 0$

كفاية الشرط: نفرض أنه يوجد متتالية ولتكن x_n من عناصر $A \setminus [x]$ متقاربة من x أي أن أي جوار للنقطة x يحوي جميع حدود المتتالية اعتباراً من حد ما أي أن أي جوار لـ x يتقاطع مع $A \setminus [x]$ أي أن x نقطة تراكم.

7. ليكن X فضاء متري و A مجموعة جزئية من X و x نقطة من هذا الفضاء:

أثبت أن x تكون نقطة لاصقة للمجموعة A إذا وفقط إذا وجدت متتالية من عناصر A متقاربة من x.

لزوم الشرط: x نقطة لاصقة وهذا يعني أن $x \in \bar{A}$ وهناك احتمالان:

① $x \notin A$ فإن x نقطة تراكم أي $x \in A'$ أي توجد متتالية من عناصر $A \setminus [x]$ متقاربة من x ولكن: $A \setminus [x] = A$ لأن $x \in \bar{A}$

② $x \in A$ فإنه يوجد متتالية ثابتة جميع عناصرها x وتكون متتالية من عناصر A متقاربة من x.

كفاية الشرط: نفرض أنه توجد متتالية من عناصر A متقاربة من x فإنه أي جوار للنقطة x يتقاطع مع A أي يحوي جميع حدود المتتالية اعتباراً من حد ما أي يتقاطع مع A فإن x نقطة لاصقة.

8 ليكن X فضاء متري تام و A فضاء جزئي منه:
اثبت أن الفضاء الجزئي A يكون تاماً إذا وفقط إذا كانت المجموعة A مغلقة في X.
لزوم الشرط: لنفرض أن الفضاء الجزئي A تام والمطلوب اثبات أن A مغلقة:
نأخذ نقطة كيفية لاصقة $x \in \bar{A}$ فإنه توجد متتالية x_n من عناصر A متقاربة من x وبما أن كل متتالية متقاربة هي متتالية كوشي $\Leftarrow$ x_n متتالية كوشي في الفضاء الجزئي A وبما أن A تام بالفرض $\Leftarrow$
كل متتالية كوشي متقاربة فيه أي تتقارب إلى نقطة من نقاطه.
كفاية الشرط: نفرض أن A مغلقة ولنثبت أن الفضاء الجزئي A تام
لنأخذ متتالية كوشي كيفية x_n من الفضاء A وبما أن A جزء من X فإن المتتالية x_n هذه هي متتالية كوشي في الفضاء X الذي هو بالفرض تام وبالتالي فهي متقاربة من عنصر ما وليكن x.
فإن x نقطة لاصقة لـ A وبما أن A بالفرض مغلقة $\Leftarrow$ $x \in A$ فالفضاء المتري A تام
9 ليكن $f: X \to Y$ تطبيقاً من الفضاء المتري X إلى الفضاء المتري Y أثبت تكافؤ القضايا التالية:
① f مستمر.
② الصورة العكسية وفق f لأي مجموعة مغلقة في Y هي مجموعة مغلقة في X.
③ الصورة العكسية وفق f لأي مجموعة مفتوحة في Y هي مجموعة مفتوحة في X
من ① ينتج ②: f مستمر و $\mathcal{V}$ مجموعة مغلقة كيفية في Y و سنثبت أن صورتها العكسية $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathcal{V})$ مغلقة في Y
بما أن f مستمر فإن المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة من $f(x)$ وحسب نفس المبرهنة فإن $f(x)$ نقطة لاصقة بـ $\mathcal{V}$
وبما أن $\mathcal{V}$ مغلقة فإن: $f(x) \in \mathcal{V} \Rightarrow x \in f^{-1}(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$
فإذن: $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$ فهي مغلقة.
من ② ينتج ③: ليكن لدينا G مجموعة مفتوحة كيفية في Y ولنثبت أن صورتها العكسية مفتوحة في X.
بما أن G مفتوحة في Y فإن متممتها $Y \setminus G$ مغلقة في Y ولدينا بالفرض $f^{-1}(Y \setminus G)$ مغلقة في X ولكن:
$$f^{-1}(Y \setminus G) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(G) = X \setminus f^{-1}(G)$$
ولدينا $X \setminus f^{-1}(G)$ مغلقة في X فإن $f^{-1}(G)$ مفتوحة في X.
من ③ ينتج ①: ليكن لدينا نقطة كيفية $x \in X$ و $\mathcal{V}$ جوار كيفي لـ $f(x)$ في Y ولنثبت أن f مستمر:
حسب تعريف الجوار في التعريف العام لا يوجد مجموعة مفتوحة G مفتوحة في Y بحيث $f(x) \in G \subseteq \mathcal{V}$
بأخذ الصورة العكسية $x \in f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(\mathcal{V})$
ولدينا بالفرض أن $f^{-1}(G)$ مفتوحة فإن $f^{-1}(G)$ جواراً لـ x أي أن f مستمر وبما أن x كيفية فينتج المطلوب

10 ليكن $f: X \to Y$ تطبيقاً مستمراً من الفضاء المتراص X إلى الفضاء المتري Y أثبت أن $f(X)$ مجموعة متراصة.

لنأخذ تغطية مفتوحة كيفية $[U_\alpha]_{\alpha \in I}$ للمجموعة $f(X)$ بحيث $f(X) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ بأخذ الصورة العكسية واستخدام خواصها نجد:

$$X = f^{-1}(f(X)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha)$$

بما أن التطبيق f مستمر فإن الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة.
إذاً جميع هذه المجموعات مفتوحة واجتماعها يحوي X إذاً هي تغطية مفتوحة لـ X ، وبما أن X متراص فإن هذه التغطية تحوي على تغطية جزئية منتهية ولتكن $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}$ حيث $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i})$ وبأخذ الصورة المباشرة نجد: $f(X) \subseteq U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$
وبهذا نكون أثبتنا أن التغطية المفتوحة الكيفية لـ $f(X)$ هي تغطية جزئية منتهية فإن $f(X)$ متراصة.

11 ليكن X فضاء متري غير مترابط تقسمه المجموعتان A ، B ولتكن G مجموعة جزئية مترابطة في X أثبت أن G تكون محتواة بالكامل إما في A أو إما في B.

لنفرض جدلاً أن G تحوي نقاط من A ومن B هذا يعني أن $A \cap G \neq \emptyset$ ، $B \cap G \neq \emptyset$
بما أن A مفتوحة في X فإن $A \cap G$ مفتوحة في الفضاء الجزئي G وبالمثل $B \cap G$ مفتوحة
كما أن:

$$(A \cap G) \cap (B \cap G) = (A \cap B) \cap G = \emptyset \cap G = \emptyset$$

هما غير متقاطعين في G ولدينا:

$$(A \cap G) \cup (B \cap G) = (A \cup B) \cap G = X \cap G = G$$

وهكذا وجدنا أن المجموعتين $A \cap G$ و $B \cap G$ تشكلان تقسيماً للفضاء الجزئي G مما يؤدي إلى أن المجموعة G غير مترابطة وهذا يناقض الفرض جدلاً أي G لا تحوي نقاط من A و B و G محتواة بالكامل إما في A أو إما في B.

12 متى يكون اجتماع مجموعتين مترابطتين مجموعة مترابطة بالتأكيد.

إذا كانت C_α أسرة من المجموعات المترابطة بحيث $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ مترابط عندئذ يكون $\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha$ مترابط

13 علل أن المجموعة المحدبة في الفضاء الإقليدي هي مجموعة مترابطة.

كل مجموعة محدبة هي مجموعة مترابطة لأن كل نقطتين من نقاطها محتويان في مجموعة جزئية مترابطة هي القطعة المستقيمة الواصلة بينهما والعكس غير صحيح بالحالة العامة.

14. اثبت أن اجتماع مجموعتين متراصتين في فضاء متري هو مجموعة متراصة.

$\mathcal{U}$ تغطية مفتوحة كيفية لـ $A \cup B$ $\Leftarrow$

$\mathcal{U}$ تغطية لـ A } $\Leftarrow$ A متراصة بالفرض إذن لها تغطية منتهية $\mathcal{U}_1$

$\mathcal{U}$ تغطية لـ B } $\Leftarrow$ B متراصة بالفرض إذن لها تغطية منتهية $\mathcal{U}_2$

إذن $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ تغطية منتهية لـ $A \cup B$

فالاجتماع $A \cup B$ هو مجموعة متراصة.

15. اعط مثالاً على مجموعتين مترابطتين اجتماعهما ليس مجموعة مترابطة.

من الرسمة التقاطع في نقطتين فقط.

16. اثبت أن المجموعة المنتهية في فضاء متري تكون محدودة.

نأخذ المجموعة المنتهية $x_1, x_2, \dots, x_n$ من الفضاء المتري (X, d) و ليكن r عدد حقيقي موجب

نحسب بعد x_1 عن باقي نقاط المجموعة: $d(x_1, x_i) \; ; \; i = 1, 2, \dots n$

نأخذ أسرة الكرات المفتوحة التي مركزها x_1 ونصف قطرها x_i

فيكون $r = \text{Max}\, d(x, x_i)$

أي أن المجموعة محدودة.

17. ليكن (X, d) الفضاء المتري المتقطع:

① ما هي المجموعات المفتوحة و المجموعات المغلقة في هذا الفضاء.

② عين كرة مفتوحة وكرة مغلقة مركز كل منها النقطة x ونصف قطر كل منها 1

③ أثبت أن الفضاء تام.

① كل مجموعات هذا الفضاء مفتوحة وكل المجموعات مغلقة.

②
$B(x, 1) = \{x\}$ مفتوحة

$\overline{B}(x, 1) = X$ مغلقة.

③ لتكن x_n متتالية كوشي كيفية في هذا الفضاء حسب التعريف:

$\forall \varepsilon > 0 \; ; \; \exists n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad ; \; \forall n, m > n_0$

لنأخذ: $1 \geqslant \varepsilon$

من أجل هذا الـ $1 \geqslant \varepsilon$ فإن:

$d(x_n, x_m) < 1 \Rightarrow d(x_n, x_m) = 0$

$\Rightarrow x_n = x_m \quad , \; \forall \; n, m > 0$

وهذا يعني أن المتتالية ثابتة اعتباراً من حد ما و المتتالية الثابتة دوماً متقاربة.

و بالتالي هذا الفضاء تام.

للمزيد من الفائدة ...
ابقوا على تواصل معنا
على صفحتكم على الفيسبوك :
طلاب قسم الرياضيات في جامعة البعث بحمص
www.facebook.com/AlbaathUnMath
وفي المجموعة الرديفة للصفحة على الرابط
www.facebook.com/groups/math.sy



ملخص للنظري واهم المبرهنات وحل بعض أسئلة الدورات

هذا العمل لمقرر عام 2014

وهو من كتابة الزميل حسن قطعان " له كل التحية "

وقام بتحويله لكتاب الكتروني وتصميمه الزميل ابراهيم الخضر